به نام زندگی

توابع احتمال

- تابع توزیع احتمال PDF یا CDF

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\}$$

1) $\forall x; \quad 0 \le F_X \le 1$

$$F_X(x) = \underbrace{P_r\{X \le x\}}_{0 \,\le\, \text{احتمال هر پیش آمد} \,\le\, 1} \Longrightarrow \forall x; \quad 0 \le F_X(x) \le 1$$

2) $F_X(-\infty) = 0$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \xrightarrow{x \to -\infty} F_X(-\infty) = P_r\underbrace{\{X \leq -\infty\}}_{\phi} = 0$$

3) $F_X(+\infty) = 1$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \xrightarrow{x \to +\infty} F_X(+\infty) = P_r\underbrace{\{X \leq \infty\}}_{\Omega} = 1$$

* تابع $F_X(x)$ به صورت مجانبی از مقدار صفر در منفی نهایت شروع می‌شود و به صورت مجانبی به سمت

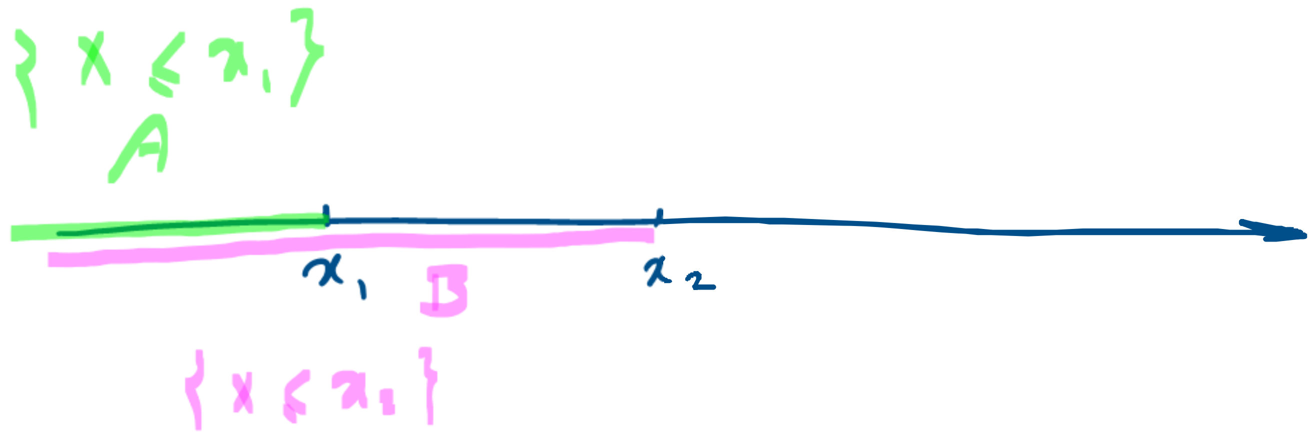
متوالیه در مثبت بی نهایت میل می کند.

4) $\forall\ x_1 \leq x_2 \quad ; \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

- تابع توزیع احتمال همواره یک تابع غیر نزولی از x است.

$$F_X(x_1) = P_r\{X \leq x_1\} \quad , \quad x_1 \leq x_2$$

$$F_X(x_2) = P_r\{X \leq x_2\}$$



$A \subseteq B$

$$\Rightarrow \; P_r\{A\} \leq P_r\{B\} \; \Rightarrow \; \underbrace{P_r\{X \leq x_1\}}_{F_X(x_1)} \leq \underbrace{P_r\{X \leq x_2\}}_{F_X(x_2)}$$

$$\Rightarrow \; F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

5) $P_r\{\underbrace{X > x}\} = 1 - F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P_r\{\underbrace{X \leq x}_{A}\}} = P_r\{A\} = P(A)$$

$$\{X > x\} = A^c \implies P_r\{X > x\} = 1 - P(A) = 1 - F_X(x)$$

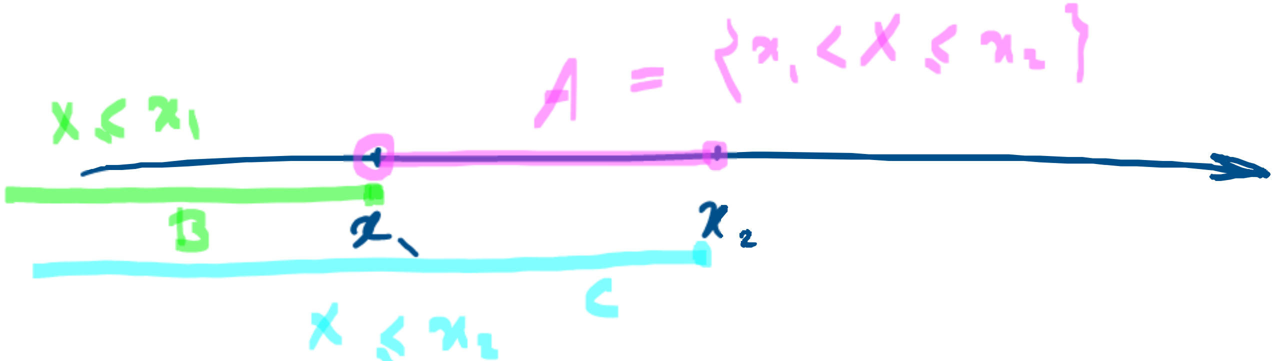
$P(A^c) = 1 - P(A)$

$$6)\quad P_r\{\underbrace{\overbrace{x_1 < X \le x_2}}\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

با کمک تابع توزیع احتمال می توانیم احتمال هر پیشامدی به فرم $\{x_1 < X \le x_2\}$ را بدست بیاوریم.

$$A = B - C \;,\quad B \subseteq C$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B) - P(C)$$



A, B جدا از هم هستند $(A \cap B = \varphi)$

$$C = A \cup B \,,$$

$$\Rightarrow P(C) = P(A) + P(B) \Longrightarrow P_r\{X \le x_2\} = P_r\{x_1 < X \le x_2\} + P_r\{X \le x_1\}$$

$$\Rightarrow \quad P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = \underbrace{P_r\{X \leq x_2\}}_{F_X(x_2)} - \underbrace{P_r\{X \leq x_1\}}_{F_X(x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad P_r\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

7) $P_r\{X = x_0\} = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ دارای جهشی به میزان } P_0 \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ باشد} \end{cases}$$

که در آن

$$F_X(x_0^-) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x_0 - \epsilon_0)$$

یادآوری: تابع $g(t)$ را در نقطه‌ی $t = t_0$ پیوسته گوییم، اگر داشته باشیم

$$g(t_0^+) = g(t_0^-) = g(t_0)$$

$$g(t_0^-) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} g(t_0 - \epsilon)$$

$$g(t_0^+) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} g(t_0 + \epsilon)$$

برای نشان دادن خصوصیت (7) از خصوصیت (6) و تعریف حد کمک می‌گیریم

$$P_r\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \qquad (1)$$

اگر قرار دهیم $x_2 = x_0$ ، $x_1 \longrightarrow x_2$

$$\xrightarrow[\substack{x_2 = x_0 \\ x_1 \to x_2}]{(1)} \lim_{\substack{x_1 \to x_2 \\ x_2 = x_0}} \underbrace{P_r\{x_1 < X \le x_2\}}_{F_X(x_2) - F_X(x_1)} \equiv P_r\{X = x_0\}$$

$$\Longrightarrow P_r\{X = x_0\} = \lim_{\substack{x_1 \to x_2 \\ x_2 = x_0}} F_X(x_2) - \lim_{\substack{x_1 \to x_2 \\ x_2 = x_0}} F_X(x_1) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\{X=x_0\} = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ پیوسته باشد} \\ P_0 & \text{اگر } F_X(x) \text{ در نقطه } x=x_0 \text{ دارای جهش به مقدار } P_0 \text{ باشد.} \end{cases}$$

8) $\forall x_0 ;\quad F_X(x_0^+) = F_X(x_0)$

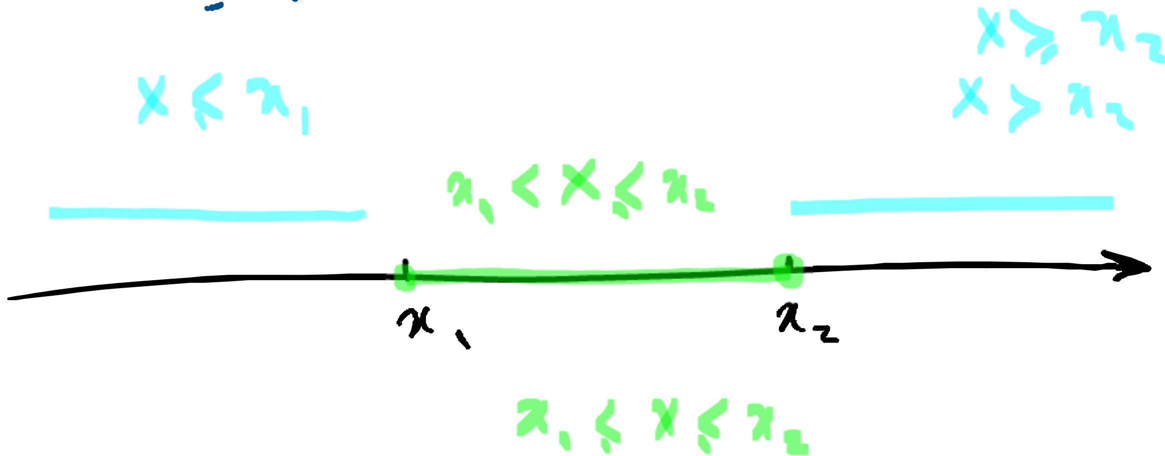
* تابع توزیع احتمال هر متغیر تصادفی X ، همواره از سمت راست پیوسته است.

با توجه به تعریف تابع احتمال و مفروضات حد ، واضح است.

$$F_X(x_0^+) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x_0 + \epsilon)$$

$$F_X(x_0) = P_r\{X \leq x_0\}$$

⇐ با داشتن تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ می توانیم احتمال هر پیشامدی را در ارتباط با X در فضای اعداد حقیقی به دست بیاوریم.



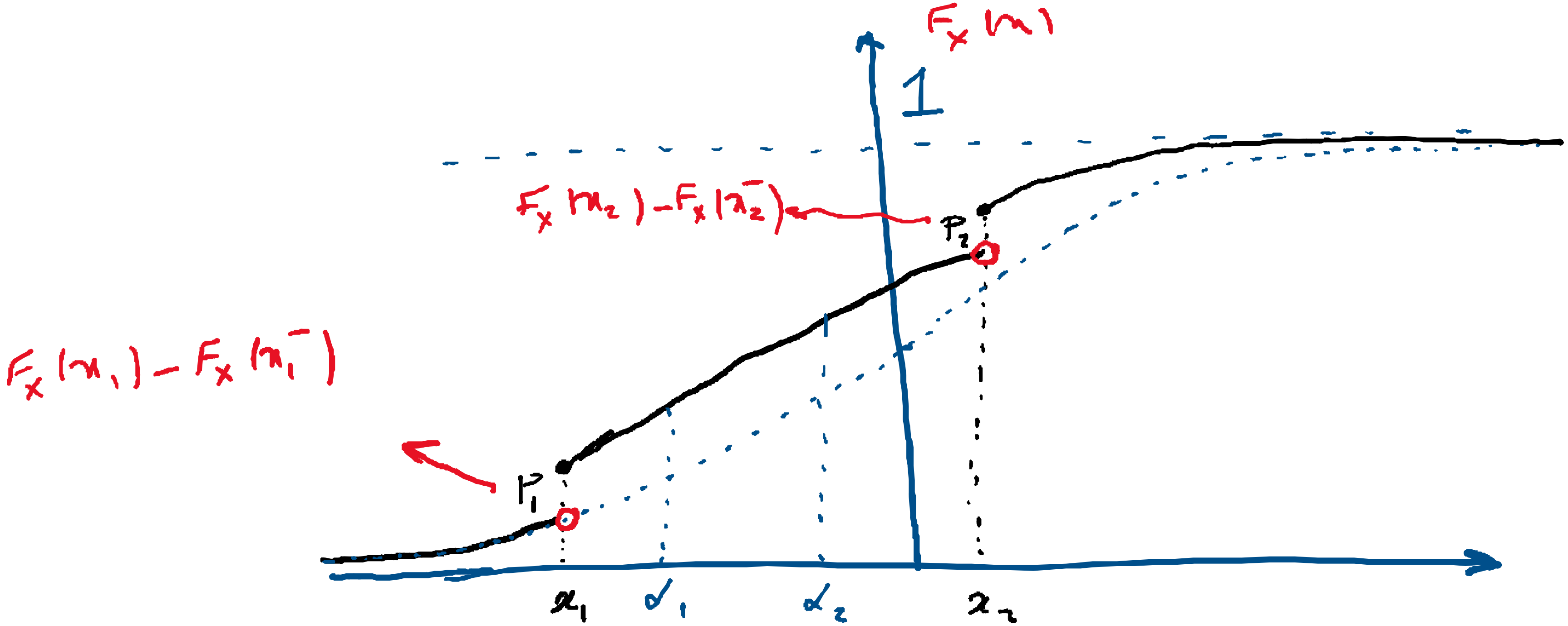
$$F_X(x_1) = P_r\{X \le x_1\}$$

$$P_r\{X > x_1\} = 1 - F_X(x_1)$$

$$P_r\{x_1 \le X \le x_2\} = \underbrace{P_r\{X = x_1\}}_{F_X(x_1) - F_X(x_1^-)} + \underbrace{P_r\{x_1 < X \le x_2\}}_{F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

مثال: تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت زیر است.

خصوصیات گفته شده در مورد تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی را برای این تابع احتمال بررسی کنید



غیرنزولی است ، $F_X(+\infty)=1$ ، $F_X(-\infty)=0$ ، $0 \le F_X \le 1$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P_r\{X = x_0\} = \begin{cases} P_1 & x = x_1 \\ P_2 & x = x_2 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$P_r\{\alpha_1 < X \leq \alpha_2\} = F_X(\alpha_2) - F_X(\alpha_1)$$

تابع توزیع احتمال همواره از سمت راست پیوسته است و اگر ناپیوستگی داشته باشد انحرافش مبتا
از سمت چپ است.

* در متغیرهای تصادفی پیوسته، $F_X(x)$ تابعی پیوسته از x است و

احتمال نقاط را برابر صفر است داریم

(PDF) $F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$

$P_r\{X = \alpha\} = 0$

* در متغیرهای تصادفی گسسته، $F_X(x)$ فرم پلکانی برحسب x دارد

(CDF)

$$F_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, u(x - x_i)$$

مفهوم صدک ها   Percentiles

در توابع احتمال گاهی ممکن است که مقداری که به ازای آنها احتمال پیشامد $\{X \leq x\}$ یک مقدار خاص داشته باشد، مورد نظر است. یعنی اگر داشته باشیم

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = u \qquad (0 \leq u \leq 1)$$

آنگاه $x = F_X^{-1}(u)$ (یعنی مقداری که در آن داریم $P_r\{X \leq x\} = u = F_X(x)$) را صدک $100u$ می گوییم

مثال: اگر داشته باشیم $F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = 0.1$

در این صورت $x = F_X^{-1}(0.1)$ را صدک دهم می‌گوییم.

* صدک 25 ام را چارک اول نیز می‌گویند. Quartile

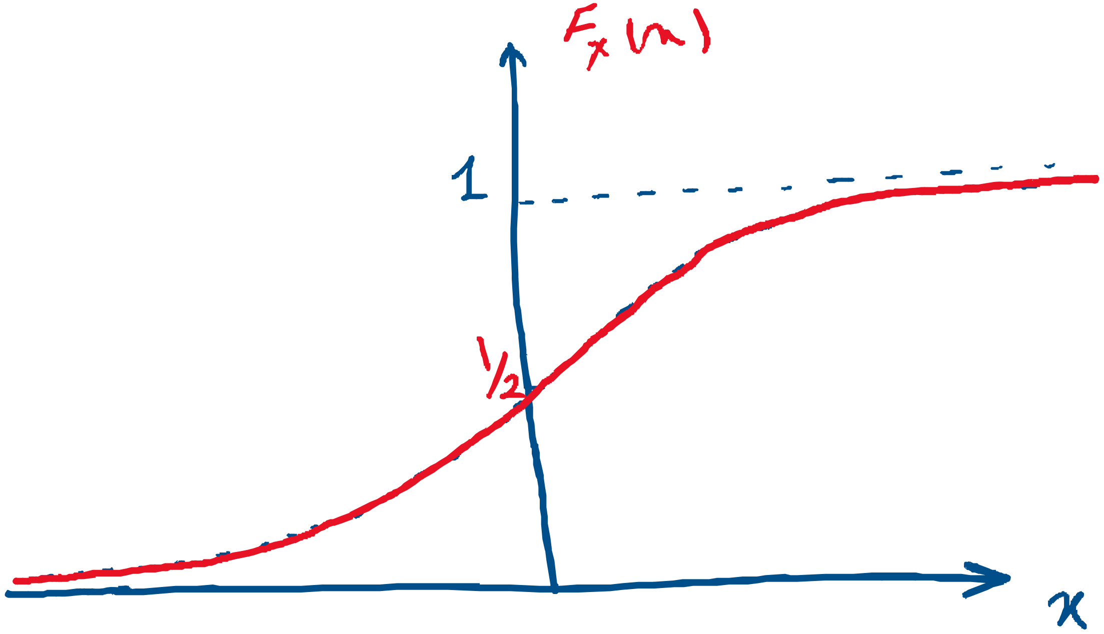
* صدک دهم را دهک اول نیز می‌گویند. Decile

* صدک پنجاهم یعنی نقطه‌ای که در آن $F_X(x) = 0.5 = 50\% = \frac{1}{2}$

را نقطه‌ی میانه یا Median تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ می‌گوییم که دارای اهمیت

ویژه‌ای است.

مثال - برای تابع توزیع احتمال زیر میانه را مشخص کنید



$$F_X(x) = \frac{1}{2}$$

Median of $F_X(x) = 0$

$$F_X(x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$= F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

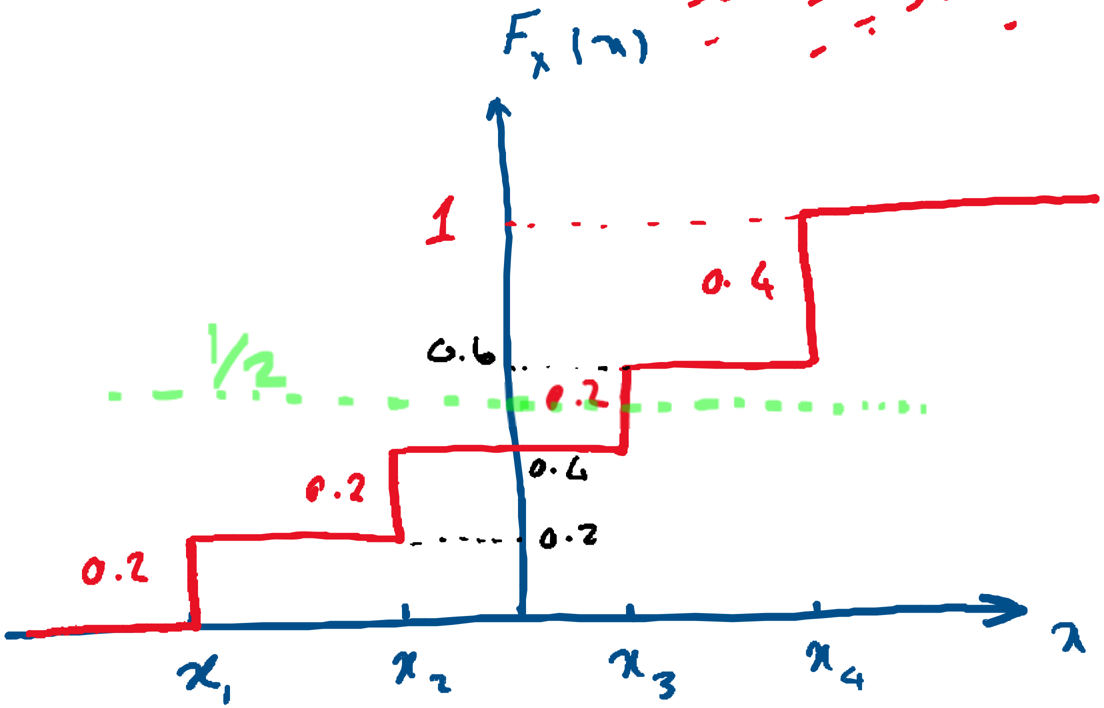
* برای متغیرهای تصادفی پیوسته که $F_X(x)$ در آنها تابعی پیوسته از x است، پیدا کردن میانه، عملیات سرراست و ساده‌ای دارد.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Median} = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

ولی برای متغیرهای تصادفی گسسته (یا تکه‌ای پیوسته) که در آنها $F_X(x)$ تابعی پله به پله از x است (مثلاً در مورد متغیرهای تصادفی گسسته، $F_X(x)$ فرم پلکانی دارد)، عملیات پیدا کردن میانه، ممکن است به سادگی حالت پیوسته نباشد. بنابراین لازم است که تعریف

دقت کنید تعریفی از میانه ارائه کنیم که هم در حالت پیوسته و هم در حالت گسسته بتوانیم از آن استفاده کنیم و میانه را پیدا کنیم

مثال: برای تابع توزیع احتمال زیر، میانه را پیدا کنید.



Median $= x_3$

بنابراین تعریف کلی برای میانه در یک تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ به صورت زیر است

$$\text{Median of } F_X(x) = m \iff \begin{cases} P_r\{X \le x\} \le \frac{1}{2} & x \le m \\ P_r\{X \le x\} \ge \frac{1}{2} & x \ge m \end{cases}$$

برای $F_X(x)$ پیوسته

$$\underbrace{P_r\{X \le x\}}_{F_X(x)} = \overbrace{P_r\{X > x\}}^{1-F_X(x)} = \frac{1}{2} = F_X(x)$$